

La magia del h -vector

Félix Almendra Hernández

Resumen

A lo largo de la historia de las matemáticas hemos apreciado la existencia de diversas y maravillosas conexiones entre diferentes áreas, resultando en el interés por estudiar temas que involucren ideas de distintas ramas de las matemáticas. Tal es el caso de la combinatoria polihédrica. Uno de los resultados más importantes en este campo es el Teorema de la Cota Superior. Con la demostración de este teorema se descubrió una maravillosa conexión entre la geometría y la combinatoria de los polítopos. El propósito de este texto es introducir algunas definiciones e ideas desarrolladas en la prueba del Teorema de la Cota Superior. El protagonista de nuestro breve texto será el h -vector.

Palabras y frases clave: combinatoria polihédrica, complejos simpliciales, h -vector.

The magic of the h -vector

Abstract

Throughout the history of mathematics we have been able to appreciate the existence of diverse and wonderful connections between different areas, resulting in the interest of studying topics involving ideas from different fields of mathematics. Such is the case of polyhedral combinatorics. One of the most important results in this field is the Upper Bound Theorem. With the proof of this theorem, a wonderful connection between geometry and combinatorial polytopes was discovered. The purpose of this text is to introduce some definitions and ideas that are developed in the proof of the Upper Bound Theorem. The main character of our brief text will be the h -vector.

Key words and phrases: polyhedral combinatorics, simplicial complexes, h -vector.

1 Introducción

Los complejos simpliciales son estructuras combinatorias ampliamente utilizadas en diversas áreas de las matemáticas para codificar información acerca de estructuras que suelen ser más complicadas. Al asociar un complejo simplicial a un objeto, es

posible explotar las propiedades combinatorias de este sin tener que entender exactamente como se comporta en otros aspectos. En ocasiones, algunas propiedades del complejo simplicial asociado al objeto son equivalentes a propiedades algebraicas o geométricas, brindándonos una herramienta muy poderosa para entender las características de dicho objeto.

Antes de ver cómo los complejos simpliciales nos pueden ayudar para la prueba del Teorema de la Cota superior, trataremos de entender qué son estos objetos y un poco de la teoría que podemos desarrollar con estos.

Definición 1. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito de vértices llamado *conjunto de vértices*. Un *complejo simplicial* en V es una colección Δ de subconjuntos de V que satisfacen las siguientes dos condiciones:

- (1) $\{x_i\} \in \Delta$ para todo $1 \leq i \leq n$

- (2) Si $F \in \Delta$ y $G \subseteq F$, entonces $G \in \Delta$.

Los subconjuntos de la colección Δ son llamados caras de Δ .

En general, dada una colección Γ de subconjuntos de V , decimos que un subconjunto τ en Γ es maximal si no existe un subconjunto de V en Γ que contenga propiamente a τ . De manera similar, decimos que un subconjunto σ en Γ es minimal si no existe un subconjunto de V en Γ que esté contenido propiamente en σ . Los conjuntos maximales de un complejo simplicial Δ se conocen como *facetas*. Gracias a la condición (2), las facetas determinan por completo un complejo simplicial pues cada cara de Δ está contenida en una faceta y todos los subconjuntos de una cara de Δ también son caras de Δ . Un complejo simplicial Δ es *puro* si todas sus caras maximales tienen la misma cardinalidad.

Observemos que si Δ es un complejo simplicial cualquiera, entonces $\emptyset \in \Delta$ pues \emptyset es subconjunto de cualquier conjunto V . En particular, \emptyset es el único elemento minimal de Δ .

Ejemplo 1. Consideremos un cuadrado con una diagonal y asignemos a cada uno de sus vértices un número del 1 al 4. Veamos que $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ es un complejo simplicial en $\{1, 2, 3, 4\}$. En este ejemplo los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 4\}$ son las facetas de Δ que tienen misma cardinalidad, por lo tanto, Δ es un complejo simplicial puro. Podemos pensar cada conjunto de cardinalidad 3 como el interior de uno de los triángulos rellenos de la figura. Así mismo, cada subconjunto de cardinalidad 2 puede ser visto como una arista sin extremos y cada subconjunto de cardinalidad 1 como un vértice. De esta manera a partir de la figura 1 se construye Δ , sin embargo también es posible construir la figura 1 a partir de Δ .

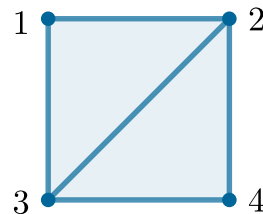


Figura 1

Ejemplo 2. Tomemos un tetraedro y definamos Δ como la colección de todos los subconjuntos propios de $V = \{1, 2, 3, 4\}$. En este caso, las caras maximales de V son los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 3, 4\}$ que corresponden geoméricamente a las caras del tetraedro.

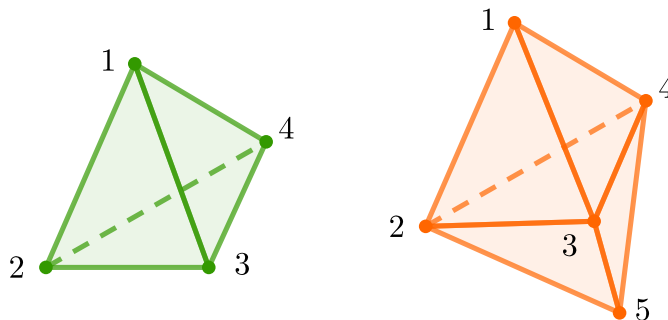


Figura 2

Ahora, consideremos un poliedro con 5 vértices y 6 caras como el de la derecha en la figura 2 y numeremos sus vértices con los enteros del 1 al 5. Podemos definir Γ como el complejo simplicial cuyas facetas son los subconjuntos de vértices que forman las caras de este poliedro, es decir, las facetas de Γ son $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ y $\{3, 4, 5\}$.

Siguiendo esta idea, dado cualquier poliedro P cuyas caras son triángulos y V su conjunto de vértices, podemos definir un complejo simplicial Δ_P en V en el cuál las

facetas son los subconjuntos de vértices tales que forman una cara en el poliedro P . Notemos que los complejos simpliciales de esta forma son puros pues cualquier cara maximal tendrá cardinalidad 3.

Definición 2. Dado un complejo simplicial Δ con vértices en V y una cara $\sigma \in \Delta$, definimos la *dimensión* de σ como $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$ (donde $|\sigma|$ es la cardinalidad de σ). Por ejemplo, si $\sigma = \emptyset$, entonces $\dim(\sigma) = |\emptyset| - 1 = -1$ y si $\sigma' = \{v\}$ entonces $\dim(\sigma') = |\{v\}| - 1 = 0$. Decimos que la dimensión de Δ es la máxima dimensión de una cara de Δ .

Así, tenemos que los complejos simpliciales de los ejemplos 1 y 2 tienen todos dimensión 2 pues las facetas están formadas por subconjuntos de vértices de cardinalidad 3. De la misma forma puede notarse que para cualquier poliedro P cuyas caras son triángulos, las facetas de Δ_P son subconjuntos de tamaño 3 por lo que la dimensión de Δ_P también es 2.

Se pueden construir complejos simpliciales de cualquier dimensión n , sin embargo es más complicado dar una interpretación geométrica de estos.

Dada la definición anterior, para todo $i \geq -1$ denotamos por $f_i(\Delta)$ al número de caras de dimensión i del complejo simplicial Δ , y si el complejo simplicial tiene dimensión d , llamamos a $(f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \dots, f_d(\Delta))$ el f -vector de Δ . En algunas ocasiones, cuando es claro quién es Δ , escribiremos simplemente f_i en lugar de $f_i(\Delta)$ por comodidad. Veamos que para cualquier complejo simplicial Δ , $f_{-1}(\Delta) = 1$ pues $\emptyset \in \Delta$ es el único elemento de dimensión -1 . Si P es un poliedro cuyas caras son triángulos se tiene que $f_{-1}(\Delta_P) = 1$ y $f_0(\Delta_P), f_1(\Delta_P), f_2(\Delta_P)$ son el número de vértices, aristas y caras de P , respectivamente. En el ejemplo 2, el f -vector de Δ es $(1, 4, 6, 4)$ y el f -vector de Γ es $(1, 5, 9, 6)$.

En la siguiente sección centraremos nuestra atención en un tipo particular de complejos simpliciales con lo cuál motivaremos la definición del h -vector.

2 El h -vector

Definición 3. Dadas dos caras F, G de un complejo simplicial Δ , definimos el intervalo de F a G denotado por $[F : G]$, como el conjunto de caras contenidas en G y que contienen a F . Es decir, $[F : G] = \{H \in \Delta | F \subseteq H \subseteq G\}$. Un complejo simplicial Δ con facetas F_1, F_2, \dots, F_t se dice *particionable* si para toda faceta F_i existe una cara $r(F_i) \in \Delta$ contenida en F_i de tal manera que el conjunto de las caras de Δ es la unión disjunta de los intervalos de la forma $[r(F_i) : F_i]$, es decir, $\Delta = \bigsqcup_{i=1}^t [r(F_i) : F_i]$.

Ejemplo 3. El complejo simplicial $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ en el ejemplo 1 es un complejo simplicial particionable pues digamos que $F_1 =$

$\{1, 2, 3\}$ y $F_2 = \{2, 3, 4\}$. Entonces, podemos tomar $r(F_1) = \emptyset \subset F_1$ y $r(F_2) = \{4\} \subset F_2$ y ver que $[r(F_1) : F_1] = [\emptyset : \{1, 2, 3\}] = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ y $[r(F_2) : F_2] = [\{4\} : \{2, 3, 4\}] = \{\{4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Por lo tanto $\Delta = [r(F_1) : F_1] \sqcup [r(F_2) : F_2]$.

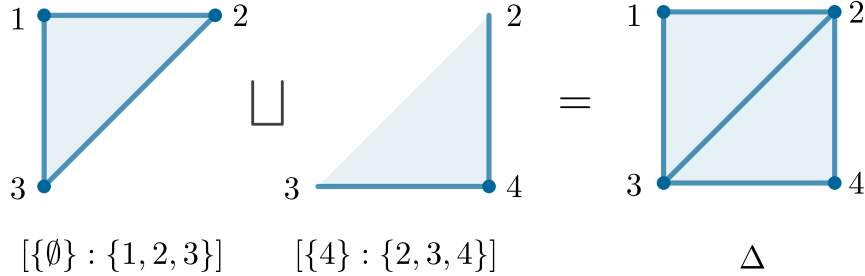


Figura 3: Complejo simplicial particionable

Ejemplo 4. El complejo simplicial Δ con vértices en $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y facetas $F_1 = \{1, 2, 3\}$ y $F_2 = \{3, 4, 5\}$ no es particionable pues supongamos que lo es, es decir, que existen caras $r(F_1), r(F_2)$ tales que $\Delta = [r(F_1) : F_1] \sqcup [r(F_2) : F_2]$. Como $\emptyset \in \Delta$ supongamos sin pérdida de generalidad que $r(F_1) = \emptyset$. Esto fuerza a $r(F_2)$ a ser igual a $\{4\}$ o $\{5\}$ pero en ambos casos Δ no será subconjunto de $[r(F_1) : F_1] \sqcup [r(F_2) : F_2]$ lo cual contradice que Δ es particionable.

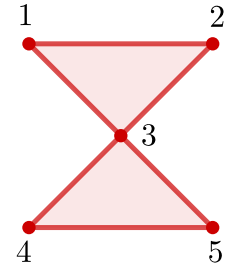


Figura 4

Los complejos simpliciales del ejemplo 2 también son particionables, por ejemplo, podemos ver que el tetraedro tiene la siguiente partición

$$[\emptyset : \{1, 2, 4\}] \sqcup [\{3\} : \{2, 3, 4\}] \sqcup [\{1, 3\} : \{1, 3, 4\}] \sqcup [\{1, 2, 3\} : \{1, 2, 3\}].$$

Supongamos que Δ es un complejo simplicial particionable de dimensión $d-1$ con facetas F_1, \dots, F_t (es decir, $|F_j| = d$ para todo j). Observemos que una cara $H \in \Delta$ es de dimensión $k-1$ si la cardinalidad de $|H|$ es k . Como Δ es particionable, se tiene que $\Delta = \bigsqcup_{j=1}^t [r(F_j) : F_j]$ por lo que $H \in [r(F_j) : F_j]$ para algún j . Si $|F_j| = i$, el número de caras $(k-1)$ -dimensionales en el intervalo $[r(F_j) : F_j]$ es igual a

$$\binom{d - |r(F_j)|}{k - |r(F_j)|} = \binom{d - i}{k - i} \quad (\text{donde } \binom{a}{b} = 0 \text{ si } a < b).$$

Esto quiere decir que

$$f_{k-1}(\Delta) = \sum_{j=1}^t \binom{d - |r(F_j)|}{k - |r(F_j)|},$$

por lo que si para todo i definimos $h_i(\Delta) = |\{F_j : |r(F_j)| = i\}|$ se sigue que

$$f_{k-1}(\Delta) = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i(\Delta). \tag{1}$$

La sucesión $(h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_d(\Delta))$ se conoce como el h -vector de Δ y la observación anterior nos dice que el f -vector está determinado por el h -vector. Sin embargo, también es posible determinar el h -vector en términos del f -vector. Para demostrar esto, consideremos los polinomios $f(x) = \sum_{k=0}^d f_{k-1}x^{d-k}$ y $h(x) = \sum_{k=0}^d h_kx^{d-k}$. Utilizando (1) veamos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^d f_{k-1}x^{d-k} &= \sum_{k=0}^d \left(\sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i \right) x^{k-d} \\ &= \sum_{k=0}^d \left(\sum_{i=0}^d \binom{d-i}{d-k} h_i x^{d-k} \right) \\ &= \sum_{i=0}^d h_i \left(\sum_{k=0}^d \binom{d-i}{d-k} x^{d-k} \right) \\ &= \sum_{i=0}^d h_i \left(\binom{d-i}{0} + \binom{d-i}{1}x + \dots + \binom{d-i}{d-i}x^{d-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^d h_i(1+x)^{d-i} \end{aligned}$$

Es decir, $f(x) = h(x+1)$ o equivalentemente $h(x) = f(x-1)$. De esta forma, al comparar los coeficientes de x^{d-i} en ambos lados de la ecuación se puede encontrar una expresión de h_i como combinación lineal de las entradas del f -vector, concluyendo que el f -vector determina el h -vector. La expresión que se obtiene es la siguiente, la cuál es frecuentemente usada como la definición del h -vector, pues la ventaja que tiene es que sirve como definición para cualquier complejo simplicial y no sólo para complejos simpliciales particionables:

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1}. \tag{2}$$

Un increíble resultado que se sigue de la observación anterior es que la definición de $h_i(\Delta)$ no depende en absoluto de la partición que le demos a Δ . Por ejemplo, utilizando la partición que dimos al complejo simplicial asociado al tetraedro después del ejemplo 4 tenemos que en este caso $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 1, 1, 1)$. Por otro lado, sabiendo que $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = (1, 4, 6, 4)$ podemos calcular los valores h_i con la fórmula (2):

$$h_0 = f_{-1} = 1, \quad h_1 = -3f_{-1} + f_0 = 1, \quad h_2 = 3f_{-1} - 2f_0 + f_1 = 1$$

$$\text{y } h_3 = -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = 1$$

En vez de evaluar explícitamente las entradas del h -vector utilizando la fórmula (2), este se puede calcular con una variante del triángulo de Pascal conocido como *el truco de Stanley*. Este consiste en escribir los f_i 's en lugar de los 1's del extremo derecho en el triángulo de Pascal y luego calcular las entradas restantes de la siguiente forma:

vecino superior derecho – vecino superior izquierdo.

Finalmente, los primeros $d + 1$ enteros en la base del triángulo serán las entradas del h -vector. Siguiendo con el ejemplo del complejo simplicial asociado al tetraedro, cuyo f -vector es $(1, 4, 6, 4)$ y h -vector es $(1, 1, 1, 1)$. El truco de Stanley funciona de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc}
 & & \mathbf{1} & \\
 & & 1 & \mathbf{4} \\
 & 1 & 3 & \mathbf{6} \\
 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} \\
 \hline
 \mathbf{h} & = & (1 & 1 & 1 & 1)
 \end{array}$$

Otro ejemplo que tenemos es la figura el complejo simplicial Γ del ejemplo 2 el cuál tiene f -vector igual a $(1, 5, 9, 6)$ y una partición dada por: $[\emptyset : \{1, 2, 4\}] \sqcup [\{3\} : \{1, 2, 3, \}] \sqcup [\{3, 4\} : \{1, 3, 4\}] \sqcup [\{5\} : \{2, 4, 5\}] \sqcup [\{3, 5\} : \{3, 4, 5\}] \sqcup [\{2, 3, 5\} : \{2, 3, 5\}]$. Por lo que en este caso, haciendo uso de la de la definición $h_i = |\{F_j : |r(F_j)| = i\}|$ calculamos que $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 2, 2, 1)$. Utilizando el truco de Stanley obtenemos el mismo vector:

$$\begin{array}{cccc}
 & & \mathbf{1} & \\
 & & 1 & \mathbf{5} \\
 & 1 & 4 & \mathbf{9} \\
 1 & 3 & 5 & \mathbf{6} \\
 \hline
 \mathbf{h} & = & (1 & 2 & 2 & 1)
 \end{array}$$

Otro resultado interesante acerca del h -vector es que si consideramos complejos simpliciales contruidos a partir de poliedros cuyas caras son triángulos (como en

el ejemplo 2), el h -vector de estos complejos simpliciales será simétrico, es decir, $h_0 = h_3$ y $h_1 = h_2$. Más aún, se puede demostrar que esto es equivalente a la relación $3f_2 = 2f_3$.

En la siguiente sección introduciremos operaciones que se pueden hacer sobre complejos simpliciales y veremos su relación con el h -vector.

3 Colapsos

Definición 4. Dado un complejo simplicial Δ , decimos que una cara $F \in \Delta$ es *libre* si F está contenida en una única cara maximal $M \in \Delta$. La operación de eliminar de Δ todas las caras que contienen a F (incluyendo a F) es un *colapso elemental*. Si $|F| = f$ y $|M| = m$, decimos que el proceso anterior es un (f, m) -*colapso elemental*. Un *proceso de colapso* en Δ es una sucesión $\Delta_1 = \Delta \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_t$ de complejos simpliciales tales que para todo $1 \leq i \leq t$, Δ_i se obtiene de Δ_{i-1} al aplicar un colapso elemental.

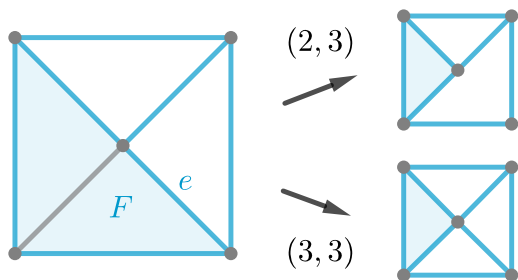


Figura 5: Colapsos elementales

Ejemplo 5. Consideremos el complejo simplicial asociado a la Figura 5, el cuál tiene 5 vértices y 5 facetas, dos de ellas con cardinalidad 3, y 3 con cardinalidad 2. En esta figura las caras de color azul son libres mientras que las caras de color gris no lo son. Por ejemplo, la faceta F es libre pues al ser una cara maximal, la única cara maximal en la que está contenida es ella misma. Otra cara libre es la arista e pues F es la única cara maximal en la que e está contenida. En la figura 5 se muestra un $(2, 3)$ -colapso (al colapsar e) y un $(3, 3)$ -colapso (al colapsar F).

Ahora introduciremos una clase particular de complejos simpliciales particionables.

Definición 5. Un complejo simplicial se dice *escalonable* si existe una partición

$$\Delta = \bigsqcup_{j=1}^t [r(F_j) : F_j]$$

tal que $r(F_1) = \emptyset$ y para todo $2 \leq j \leq t$ y todo $k < j$, $r(F_j)$ no está contenida en F_k . Por ejemplo, todos los complejos simpliciales asociados a poliedros con caras triangulares tales como en el ejemplo 2 tienen una partición que los hace escalonables.

Si Δ es un complejo simplicial escalonable como en la definición anterior, podemos definir un proceso de colapso con $\Delta_i = \bigsqcup_{j=1}^{t-i} [r(F_j) : F_j]$ para $0 \leq i < t$ y $\Delta_t = \emptyset$. Es decir, Δ_i es el complejo simplicial obtenido después de borrar los últimos i intervalos de la partición de Δ . Notemos que efectivamente la sucesión definida de esta forma es un proceso de colapso: para todo i las únicas caras maximales en Δ_i son $\{F_j : j \leq t - i\}$ por lo que $r(F_{t-i})$ es libre en Δ_i pues pertenece únicamente al intervalo $[r(F_{t-i}) : F_{t-i}]$ con cara maximal F_{t-i} . Al hacer el colapso elemental correspondiente a la cara libre $r(F_{t-i})$ estamos borrando el intervalo $[r(F_{t-i}) : F_{t-i}]$ de Δ_i por lo que obtenemos $\Delta_{(i-1)} = \bigsqcup_{j=1}^{t-(i-1)} [r(F_j) : F_j]$. Más aún, si $|r(F_{t-i})| = i'$, al pasar de Δ_i a $\Delta_{(i-1)}$ estamos haciendo un (i', d) -colapso. Por lo tanto, podemos concluir que el número de (i', d) -colapsos hechos en el proceso de colapso que estamos considerando es igual a $h_{i'}$.

Ejemplo 6. Como mencionamos al final de la definición 5, un ejemplo de un complejo simplicial escalonable es el complejo simplicial Δ asociado al tetraedro definido en el ejemplo 2. Para probar esto consideremos la partición

$$[\emptyset : \{1, 2, 4\}] \sqcup [\{3\} : \{2, 3, 4\}] \sqcup [\{1, 3\} : \{1, 3, 4\}] \sqcup [\{1, 2, 3\} : \{1, 2, 3\}]$$

donde $F_1 = \{1, 2, 4\}$, $F_2 = \{2, 3, 4\}$, $F_3 = \{1, 3, 4\}$ y $F_4 = \{1, 2, 3\}$. Observemos que $r(F_1) = \emptyset$ y para todo $2 \leq j \leq 4$, $r(F_j)$ no está contenido en ningún F_k con $k < j$. Por lo tanto concluimos que este complejo simplicial es escalonable. En la figura 6 se puede apreciar geoméricamente el proceso de colapso en Δ que definimos para complejos simpliciales escalonables.

4 ¿Por qué es útil el h -vector?

Un ejemplo en el que el h -vector ha sido de gran utilidad es en la prueba del Teorema de la Cota Superior. Para entender más o menos lo que dice este teorema primero tenemos que entender una definición más.

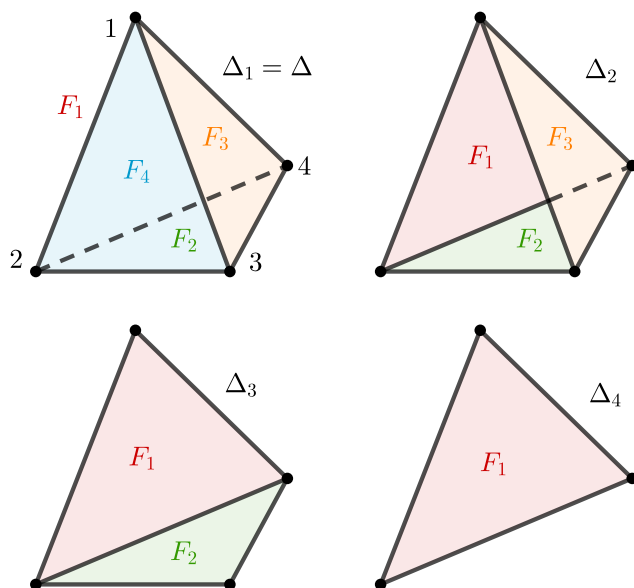


Figura 6: Proceso de colapso

Lo que buscamos definir es una generalización de los polígonos y los poliedros, por lo que antes de buscar una generalización podemos preguntarnos cuál es la definición de un polígono o de un poliedro. Estos se pueden definir de varias formas, sin embargo la que vamos a usar es la siguiente:

Un polígono es un conjunto en \mathbb{R}^2 que puede ser visto como el conjunto convexo más chico que contiene un número finito de vértices y este se denota por $\text{conv}(V)$. Por ejemplo, si $|V| = 2$, $\text{conv}(V)$ es un segmento, pero si $|V| = 3$ $\text{conv}(V)$ puede ser un triángulo o un segmento. Un poliedro se define de forma similar como el conjunto convexo más chico que contiene un número finito de puntos en \mathbb{R}^3 pero que no puede ser contenido en \mathbb{R}^2 . Con esta idea en mente, definimos un *politopo* como el conjunto convexo P más chico que contiene cierto conjunto de puntos $V \subset \mathbb{R}^n$ y decimos que P tiene dimensión d si P está contenido en \mathbb{R}^d (posiblemente después de trasladarlo) pero no en \mathbb{R}^{d-1} . Se puede observar que el mínimo número de puntos que debe tener V para que P tenga dimensión d , es $d + 1$. Cuando V tiene $d + 1$ puntos y P es de dimensión d decimos que P es un simplejo de dimensión d . Por ejemplo, los triángulos son politopos de dimensión 2 y los tetraedros son simplejos de dimensión 3.

Ahora, tratemos de darnos una idea de qué son las caras en un politopo. Cuando nosotros tenemos un poliedro, digamos un cubo por ejemplo, podemos dejar el cubo

sobre una superficie plana y definir las caras del cubo como los posibles conjuntos de puntos que tocan esta superficie plana. En este caso particular, estas caras pueden ser los 8 cuadrados que tiene el cubo, alguna de las 12 aristas o incluso alguno de los 8 vértices, lo cuál parece bastante improbable pero no es imposible. En general, para cualquier politopo P , sus caras pueden ser pensadas como el conjunto de puntos que pueden descansar sobre una superficie plana. Por ejemplo, ningún par de vértices opuestos en el cubo forman una cara pues no hay forma en la que el segmento que une estos dos vértices descansa sobre una superficie plana. Se puede ver que las caras de un politopo P son a su vez politopos de dimensión menor a la dimensión de P . Denotamos por $f_i(P)$ al número de caras de dimensión i en el politopo P .

Los politopos son objetos muy útiles en diversas áreas de las matemáticas, sin mencionar que son interesantes por sí mismos tal como lo han sido los poliedros y polígonos a lo largo de la historia de las matemáticas. Una pregunta de mucho interés acerca de politopos es la siguiente: Dado un politopo P con n vértices y de dimensión d ,

¿cuál es el máximo número de caras de dimensión i que se puede tener P ?

Esta pregunta fue por primera vez respondida en 1970 por Peter McMullen, después de alrededor de 12 años de su planteamiento. Este resultado es conocido como “El Teorema de la Cota Superior”. Una prueba que sigue las ideas de McMullen pero que concluye con otras ideas interesantes fue publicada en 1985 por Noga Alon y Gil Kalai en [2].

Para encontrar las cotas de los números $f_i(P)$ fue fundamental el uso del h -vector y de todas las ideas planteadas en las secciones anteriores. A continuación se presenta una breve idea de cómo todas estas ideas fueron conectadas para acotar el número $f_i(P)$ para todo politopo con n vértices de dimensión d .

Una de las primeras cosas que notó McMullen es que dado un politopo d -dimensional con n -vértices, siempre se podía aplicar un proceso conocido como “empujar vértices” para obtener un politopo cuyas caras fueran todas simplejos. Al hacer este proceso se obtiene un nuevo politopo tal que para cualquier $0 \leq i \leq d$, el número de caras i -dimensionales del nuevo politopo es mayor o igual al número de caras i -dimensionales del anterior. En la figura 7 se puede apreciar como el vértice v está contenido en 3 caras que no son simplejos. Sin embargo, después de empujar el vértice v al vértice w se puede observar que ahora todas las caras que contienen a w son simplejos y además, para cada dimensión i , el número de caras de dimensión i que contienen w no decreció respecto al número de caras de dimensión i que contenían a v .

Después de “empujar” cada uno de los vértices en P se obtendrá un poliedro cuyas

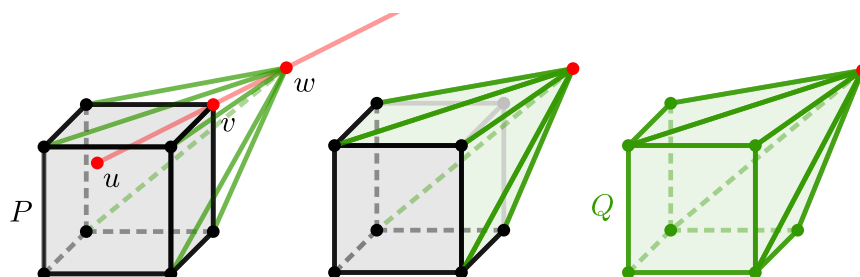


Figura 7: Empujar un vértice

caras son todos simplejos. En particular, todas las caras de un poliedro son simplejos cuando todas las caras de dimensión 2 del poliedro son triángulos.

A este tipo de politopos (en los que todas sus caras son simplejos) es posible asociarles un complejo simplicial Δ_P como se describió al final del ejemplo 2. Más aún se puede notar que $f_i(\Delta_P) = f_i(P)$ y $h_i(\Delta) = h_i(P)$. Utilizando la forma en la que escribimos los elementos del f -vector como combinaciones lineales de coeficientes no negativos del h -vector:

$$f_{k-1}(\Delta_P) = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i(\Delta_P)$$

se puede acotar cualquier f_{k-1} acotando los $h_i(\Delta_P)$'s. Para acotar los $h_i(\Delta)$'s se explota el hecho de que Δ_P es escalonable. Una forma de hacer esto es utilizando la demostración de que Δ es escalonable, la cuál se puede consultar en el capítulo 8 de [1]. Otra manera de hacerlo es utilizando los colapsos descritos en la última sección, lo cuál se puede consultar en [2].

De esta forma es posible acotar las entradas del f -vector gracias al h -vector.

Referencias

- [1] Ziegler, G. M., *Lectures on Polytopes*, Graduate Text in Mathematics 152, Springer, 1995.
- [2] Alon, N. Kalai, G., *A simple proof of the upper bound theorem*, European Journal of Combinatorics, **6**(3) (1985), 211-214.

Félix Almendra Hernández (f_almendra.h@ciencias.unam.mx)
 Universidad Nacional Autónoma de México